



گزینه ۳

۱

در شکل نیم‌مماس سمت چپ بر نمودار تابع $y = |x^3 - 1|$ در $x = 1$ رسم شده است. شیب نیم‌مماس چپ در $x = 1$ برابر با $f'_-(1)$ می‌شود:

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^3 - 1| - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^3 - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x^2 + x + 1) = -3 \end{aligned}$$

پس نیم‌مماس سمت چپ از نقطه $(1, 0)$ می‌گذرد و دارای شیب -3 است:

$$y - 0 = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 3$$

a عرض از مبدأ خط مماس است، پس: $a = 3$

گزینه ۱

۲

ابتدا تابع را ساده‌تر می‌کنیم و به‌صورت توانی می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[5]{x^2 \sqrt[6]{x^2 \sqrt[3]{x^2}}} = \sqrt[5]{x^2 \sqrt[6]{x^2 \times x^{\frac{2}{3}}}} \\ &= \sqrt[5]{x^2 \sqrt[6]{x^{\frac{8}{3}}}} = \sqrt[5]{x^2 \times x^{\frac{4}{9}}} = \sqrt[5]{x^{\frac{22}{9}}} = x^{\frac{22}{45}} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{22}{45} x^{-\frac{23}{45}} = \frac{22}{45 \sqrt[45]{x^{23}}} \end{aligned}$$

از مقایسه این عبارت با $f'(x) = \frac{a}{b \sqrt[15]{x^c}}$ نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} a = 22 \\ b = 45 \Rightarrow a - b + c = 22 - 45 + 9 = -14 \\ c = 9 \end{cases}$$

کافی است طبق روابط محاسبه مشتق، $f'(x)$ را به دست آورد؛ سپس مجموع ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ را به دست آوریم.

$$f(x) = 21x^3 - \frac{21}{2}x^2 + 62$$

$$\Rightarrow f'(x) = (21)(3)x^2 - \left(\frac{21}{2}\right)(2)(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 63x^2 - 21x = 0$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها: } S = \frac{-b}{a} = \frac{21}{63} = \frac{1}{3}$$

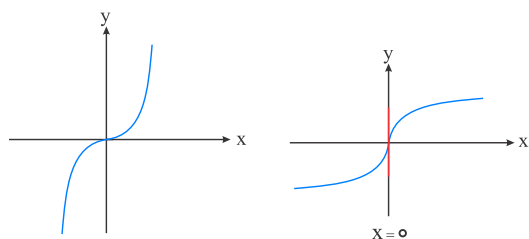
توجه: اگر برای مجموع ریشه‌های یک معادله درجه ۲، $S = \frac{-b}{a}$ را به خاطر نداشتیم، کافی است ریشه‌ها را یافته و با یکدیگر جمع کنیم:

$$f'(x) = 63x^2 - 21x = 0$$

$$63x^2 - 21x = 0 \Rightarrow 21x(3x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

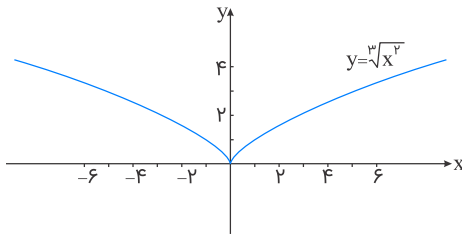
$$\Rightarrow x_1 + x_2 = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x} = f^{-1}(x) \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

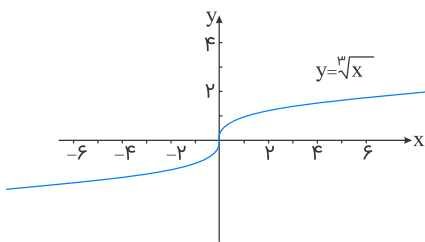


طبق شکل می‌بینیم معادله خطی که در مبدأ مختصات $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ مماس می‌شود $x = 0$ است.

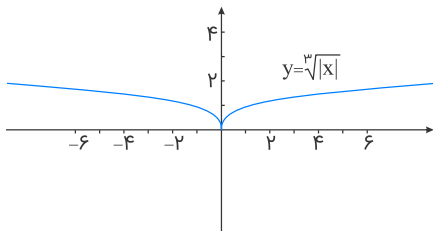
$$y = \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow y'(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{\sqrt[3]{x^2} - \circ}{x - \circ} = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \pm\infty$$



$$y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y'(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{\sqrt[3]{x} - \circ}{x - \circ} = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

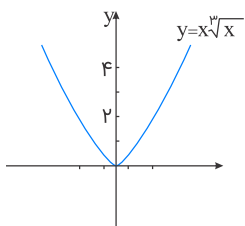


$$y = \sqrt[3]{|x|} \Rightarrow y'(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{\sqrt[3]{|x|} - \circ}{x - \circ} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow \circ^-} \frac{\sqrt[3]{-x}}{x} = -\infty \end{cases}$$



باتوجه به شکل‌های رسم‌شده در گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ خط $x = 0$ مماس قائم توابع رسم شده است.

$$y = x\sqrt[3]{x} \Rightarrow y'(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ} \frac{x\sqrt[3]{x} - \circ}{x - \circ} = \lim_{x \rightarrow \circ} \sqrt[3]{x} = 0$$



شیب خط مماس برابر صفر است، مطابق شکل در گزینه ۳ مماس قائم وجود ندارد.

منظور از شیب خط مماس بر نمودار f' در نقطه $x = 1$ همان $f''(1)$ می‌باشد:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{x^3} - 5x^{-2} = \frac{3}{x^3} - \frac{5}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-3x^2)(3)}{x^6} - \frac{(-2x)(5)}{x^3} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{-9}{x^3} + \frac{10}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{(-3x^2)(-9)}{x^6} + \frac{(-2x)(10)}{x^3} = \frac{27}{x^4} - \frac{20}{x^2} \\ \Rightarrow f''(1) &= 27 - 20 = 7 \end{aligned}$$

نکته: اگر $y = f(x)g(x)$ و توابع f و g در a مشتق‌پذیر از مرتبه دوم باشند و f در $x = a$ عامل صفر کننده با توان ۲ داشته باشد، برای محاسبه $y''(a)$ کافی است از عامل صفر کننده دو بار مشتق بگیریم و در بقیه تابع ضرب کنیم و در آخر $x = a$ را جایگذاری کنیم.
ابتدا تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = \frac{x^2 - 16x + 64 + x}{x\sqrt[3]{x-7}} = \frac{(x-8)^2 + x}{x\sqrt[3]{x-7}} = \underbrace{\frac{(x-8)^2}{x\sqrt[3]{x-7}}}_{y_1} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{x-7}}}_{y_2}$$

اکنون مشتق دوم توابع y_1 و y_2 را جداگانه محاسبه و باهم جمع می‌کنیم.
باتوجه به اینکه تابع y_1 داری عامل صفر کننده $(x-8)^2$ با توان ۲ می‌باشد، طبق نکته کافی است ابتدا از عامل صفر کننده دو بار مشتق بگیریم و در بقیه تابع ضرب کنیم و در آخر $x = a$ را جایگذاری کنیم:

$$\begin{aligned} y_1 &= (x-8)^2 \times \frac{1}{x\sqrt[3]{x-7}} \Rightarrow y''_1 = 2 \times \frac{1}{x\sqrt[3]{x-7}} \\ \Rightarrow y''_1(8) &= 2 \times \frac{1}{8\sqrt[3]{8-7}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

حال مشتق دوم y_2 را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{1}{\sqrt[3]{x-7}} = (x-7)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow y'_2 = -\frac{1}{3}(x-7)^{-\frac{4}{3}} \Rightarrow y''_2 = \frac{4}{9}(x-7)^{-\frac{7}{3}} \\ \Rightarrow y''_2(8) &= \frac{4}{9}(8-7)^{-\frac{7}{3}} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

بنابراین مشتق دوم تابع f در نقطه $x = 8$ برابر است با:

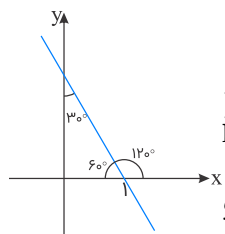
$$\Rightarrow f''(8) = y''_1(8) + y''_2(8) = \frac{1}{4} + \frac{4}{9} = \frac{25}{36}$$

گزینه "۳" درست است.

طبق تعریف مشتق می‌دانیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+1) - f(1)}{h} = f'(1)$$

و داریم:



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+1) - f(1)}{2h} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+1) - f(1)}{h} = \frac{1}{2} f'(1)$$

برای یافتن $f'(1)$ باید شیب خط را بیابیم؛ چراکه می‌دانیم مشتق همان شیب خط مماس است و از آنجا که تابع $f(x)$ خطی است، شیب خط مماس بر نمودار آن، همه‌جا یکسان است. می‌دانیم شیب خط تانژانت زاویه تشکیل‌دهنده آن با جهت مثبت محور x ها است که در اینجا 120° است، پس داریم:

$$f'(x) = f'(1) = m = \tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2} f'(1) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

اگر $f(x)$ در $x = -\frac{3}{2}$ مشتق پذیر باشد، باید اولاً در این نقطه پیوسته باشد. پس داریم:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - x[x] & ; x \geq -\frac{3}{2} \Rightarrow \text{حد راست و مقدار} = a\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)\left[-\frac{3}{2}\right] = \frac{9}{4}a - 3 \\ b|x^2 - 1| - 1 & ; x < -\frac{3}{2} \Rightarrow \text{حد چپ} = b\left(\underbrace{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 1}_{\frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}}\right) - 1 = \frac{5}{4}b - 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حد راست} = \text{حد چپ} = \text{مقدار}} \frac{9}{4}a - 3 = \frac{5}{4}b - 1 \quad (1)$$

ثانیاً مشتق راست و مشتق چپ موجود و برابر هم باشند. داریم:

$$f'_+\left(-\frac{3}{2}\right) = (ax^2 - x\left[-\frac{3}{2}\right])' = (ax^2 + 2x)' = 2ax + 2 \xrightarrow{x=-\frac{3}{2}} -3a + 2$$

$$f'_-\left(-\frac{3}{2}\right) = (b\overbrace{|x^2 - 1|}^{\text{مثبت}} - 1)' = (b(x^2 - 1) - 1)' = b(2x) \xrightarrow{x=-\frac{3}{2}} -3b$$

$$\xrightarrow{f_+ = f'_-} -3a + 2 = -3b \quad (2)$$

حال با حل دستگاه دو معادله دو مجهول، داریم:

$$\xrightarrow{(1), (2)} \begin{cases} \frac{9}{4}a - 3 = \frac{5}{4}b - 1 \xrightarrow{\times 4} 9a - 5b = 8 \\ -3a + 2 = -3b \Rightarrow 3a - 3b = 2 \xrightarrow{\times (-3)} -9a + 9b = -6 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} 4b = 2 \Rightarrow b = \frac{1}{2} = 0.5$$

$f \circ f'(x)$ تابعی چندجمله‌ای از درجه دوم است، به عبارتی با قرار دادن f' در داخل تابع $f(x)$ ، به عبارت درجه دوم رسیده‌ایم. پس $f(x)$ خود باید از درجه دوم باشد، یعنی:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 2ax + b \\ f''(x) = 2a \end{cases}$$

$$\Rightarrow f \circ f'(x) = f(f'(x)) = f(2ax + b)$$

$$= a(2ax + b)^2 + b(2ax + b) + c$$

$$= (4a^3x^2 + 4a^2bx + ab^2) + (2abx + b^2) + c$$

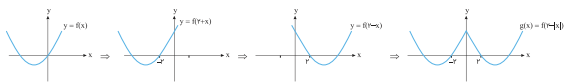
$$= (4a^3)x^2 + (4a^2b + 2ab)x + (ab^2 + b^2 + c)$$

از مقایسه این عبارت با $108x^2 + mx + n$ داریم:

$$4a^3 = 108 \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow f''(x) = 2a = 6$$

چون f'' تابعی ثابت است، $f''(99)$ هم برابر ۶ خواهد بود.

برای رسم تابع $g(x)$ ، ابتدا نمودار تابع $f(2+x)$ را با انتقال نمودار f به اندازه ۲ واحد به سمت چپ رسم می‌کنیم، سپس از طریق قرینه‌یابی نسبت به محور y ها نمودار تابع $f(2-x)$ رسم می‌شود و در آخر قسمت‌های سمت چپ محور y ها را حذف کرده و قرینه قسمت سمت راست را در سمت چپ محور y ها رسم می‌کنیم تا تابع $g(x) = f(2-|x|)$ رسم شود:



نمودار تابع g در دو نقطه مماس افقی دارد؛ یعنی g' در دو نقطه باید برابر با صفر شود. چون نمودار g شامل سهمی‌هایی با دهانه روبه‌بالا

است، پس ضریب x^2 در معادلات آن‌ها مثبت است؛ پس g' برابر با تابع خطی با شیب مثبت است؛ بنابراین گزینه ۱ درست است.

حد صورت کسر به ازای $x = 2$ برابر صفر است؛ ولی چون مقدار حد کسر عددی مخالف صفر است، پس حالت مبهم $\frac{0}{0}$ رخ داده است؛ بنابراین مقدار حد مخرج کسر نیز به ازای $x = 2$ برابر صفر است.

$$5 - f(2) = 0 \Rightarrow f(2) = 5$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{5 - f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{f(2) - f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-3) \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{-(f(x) - f(2))} \\ &= (2-3) \times \frac{-1}{f'(2)} = \frac{1}{f'(2)} \Rightarrow \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{3} \Rightarrow f'(2) = 3 \end{aligned}$$

می‌دانیم که:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ \Rightarrow (g \circ f)'(x) &= (g(f(x)))' = f'(x) g'(f(x)) \end{aligned}$$

روش اول:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}, \quad g'(x) = 3x^2 \\ \Rightarrow (g \circ f)'(x) &= f'(x) g'(f(x)) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} \times 3 \left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2} \right) = 2x \\ \Rightarrow (g \circ f)'(-4) &= 2(-4) = -8 \end{aligned}$$

روش دوم:

ابتدا $g \circ f(x)$ را بسازیم، سپس مشتق بگیریم:

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = g\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right) = \left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^3 - 1 = x^2 + 1 - 1 = x^2 \\ \Rightarrow (g \circ f)'(x) &= 2x \Rightarrow (g \circ f)'(-4) = 2(-4) = -8 \end{aligned}$$

راه حل اول:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x - \sqrt{h}) - f(x + \sqrt{h})}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x - \sqrt{h}) - f(x + \sqrt{h}) + f(x) - f(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x - \sqrt{h}) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \sqrt{h}) - f(x)}{h} \\&= -\sqrt{h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x - \sqrt{h}) - f(x)}{-\sqrt{h}} - \sqrt{h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + \sqrt{h}) - f(x)}{\sqrt{h}} = -\sqrt{h} f'(x) - \sqrt{h} f'(x) \\&= -2\sqrt{h} f'(x) \Rightarrow -2\sqrt{h} f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f'(4) = 0\end{aligned}$$

راه حل دوم:

نکته:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + mh) - f(x + nh)}{kh} = \left(\frac{m-n}{k}\right) f'(x)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x - \sqrt{h}) - f(x + \sqrt{h})}{h} &= \left(\frac{-\sqrt{h} - \sqrt{h}}{1}\right) f'(x) = -2\sqrt{h} f'(x) \\-2\sqrt{h} f'(x) &= 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f'(4) = 0\end{aligned}$$

بررسی نقاط:

$$\begin{aligned}A : f(x) > 0, f'(x) > 0 &\Rightarrow \frac{f(x)}{f'(x)} > 0 \\B : f(x) > 0, f'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{f(x)}{f'(x)} = \text{تعریف نشده} \\C : f(x) < 0, f'(x) = 0 &\Rightarrow \frac{f(x)}{f'(x)} = \text{تعریف نشده} \\D : f(x) < 0, f'(x) > 0 &\Rightarrow \frac{f(x)}{f'(x)} < 0 \\E : f(x) > 0, f'(x) > 0 &\Rightarrow \frac{f(x)}{f'(x)} > 0 \\F : f(x) > 0, f'(x) < 0 &\Rightarrow \frac{f(x)}{f'(x)} < 0\end{aligned}$$

پس در نقاط D و F شرط مذکور برقرار است.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2x \Rightarrow f'(1) = 3a + 2 \Rightarrow 15a + 2 = 19 \Rightarrow a = 1$$

$$f''(x) = 6ax + 2 \Rightarrow f''(2) = 12a + 2$$

$$f'(2) = -f'(8)$$

می‌دانیم که در سهمی $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ ، شیب خطوط مماس بر نمودار آن در نقاط با عرض یکسان قرینه یکدیگر هستند؛ بنابراین این نقاط نسبت به محور تقارن سهمی متقارن هستند. حال اگر طول این نقاط را α و β بنامیم داریم:

$$\alpha + \beta = -\frac{B}{A}$$

در این سؤال داریم:

$$2 + 8 = a \Rightarrow a = 10 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 10x + b$$

$$\Rightarrow f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-x^2 + 10x + b + 16 - 40 - b}{x - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-x^2 + 10x - 24}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-(x-4)(x-6)}{x-4} = 2$$

می‌دانیم آهنگ تغییر لحظه‌ای برابر است با مقدار مشتق تابع موردنظر، پس داریم:

$$y' = 3x^2 - 6x + 2$$

کمترین مقدار این تابع به ازای رأس سهمی اتفاق می‌افتد، یعنی:

$$x_S = \frac{-(-6)}{2(3)} = 1 \Rightarrow y'(1) = 3 - 6 + 2 = -1$$

پس کمترین مقدار آهنگ لحظه‌ای -۱ است.

از طرفی آهنگ متوسط در این بازه برابر است با:

$$\frac{y(3) - y(1)}{3 - 1} = \frac{((3)^3 - 3(3)^2 + 2(3) + 1) - ((1)^3 - 3(1)^2 + 2(1) + 1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

بنابراین:

$$[1, 3] \text{ بازه } -1 - 3 = -4 \text{ کمترین مقدار ممکن برای آهنگ لحظه‌ای - آهنگ متوسط در بازه } [1, 3]$$

شیب خط $y = -2x + 3$ باید با مشتق تابع $y = -x^3 + x + m$ برابر باشد. داریم:

$$y' = -3x^2 + 1 = -2 \Rightarrow -3x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \checkmark \\ x = -1 & \times \end{cases}$$

چون نقطهٔ تماس در ناحیهٔ اول قرار دارد، $x = 1$ قابل قبول است. به علاوه منحنی و خط در $x = 1$ باید از یک نقطه عبور کنند.

$$y = -2x + 3 \xrightarrow{x=1} y = 1 \Rightarrow \text{نقطهٔ تماس: } A(1, 1)$$

این نقطه باید در ضابطهٔ $y = -x^3 + x + m$ هم صدق کند. پس داریم:

$$1 = -1 + 1 + m \Rightarrow m = 1$$

اول ضابطهٔ تابع $y = f(x)$ را پیدا می‌کنیم. ریشه‌ها $x = 3$ و $x = -1$ هستند، پس:

$$y = a(x+1)(x-3) \xrightarrow{\text{طول رأس}=1} y(1) = 2 \Rightarrow a(2)(-2) = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}(x+1)(x-3) = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x - 3)$$

مشتق $(g \circ f)(x)$ را می‌خواهیم:

$$\begin{aligned} (g \circ f(x))' &= f'(x) \times g'(f(x)) = -\frac{1}{2}(2x-2) \times 3(f(x))^2 = -\frac{1}{2}(2x-2) \times 3\left(-\frac{1}{2}(x^2-2x-3)\right)^2 \\ &\xrightarrow{x=0} -\frac{1}{2}(-2)(3)\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

ابتدا سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[0, 4]$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{5(4)^2 - 20(4) + 12 - 12}{4} = 0$$

حال باید ببینیم سرعت لحظه‌ای در کدام لحظه برابر با صفر است:

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 10t - 20 = 0 \Rightarrow t = 2s$$

چون f' تابع درجه ۱ است، پس f درجه ۲ است:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \xrightarrow{f(0)=3} f(x) = ax^2 + bx + 3$$

f' را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = 2ax + b$$

معادله خط رسم‌شده (f') را می‌نویسیم:

$$m = \frac{1 - 0}{0 - 2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$$

با برابر گذاشتن $2ax + b$ و $-\frac{1}{2}x + 1$ نتیجه می‌گیریم که: $a = -\frac{1}{4}$ و $b = 1$ است، پس:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 \Rightarrow f(1) = 9$$

برای آنکه تابع f در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، باید دامنه تعریف تابع نیز $\mathbb{R}$ باشد. برای این منظور باید:

(۱) عبارت مخرج یعنی $x^2 - 4x + m$ فاقد ریشه حقیقی باشد. داریم:

$$\Delta < 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4m < 0 \Rightarrow m > 4 \xrightarrow{m \in \mathbb{N}} \min(m) = 5$$

(۲) عبارت $(x-1)^{n+1}$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، پس $n+1$ مقداری زوج است. دقت کنیم اگر توان $(x-1)$ برابر ۲ باشد، تابع در $x=1$ مشتق‌ناپذیر خواهد بود. پس داریم:

$$n+1=2 \Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x^2 - 4x + m} = \frac{|x-1|}{x^2 - 4x + m} \Rightarrow x=1 \text{ مشتق‌ناپذیر است}$$

بنابراین کمترین مقدار برای $n+1$ ، ۴ است.

$$\min(n+1) = 4 \Rightarrow \min(n) = 3 \Rightarrow \min(m+n) = 5 + 3 = 8$$

ابتدا عبارات را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} \times \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2} + x} = \sqrt{1+x^2} + x$$

$$f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \times \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{1+x^2} - x} = \sqrt{1+x^2} - x$$

حال از عبارت فوق مشتق می‌گیریم. باتوجه به $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ داریم:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1 = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1$$

$$\xrightarrow{x=1} f'(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2} - 2}{2}$$

$$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + 1 = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 1$$

$$\xrightarrow{x=1} g'(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{2} + 2}{2}$$

$$\frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{\frac{\sqrt{2}-2}{2}}{\frac{\sqrt{2}+2}{2}} = \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2} \times \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-2}$$

$$= \frac{-(\sqrt{2}-2)^2}{2} = 2\sqrt{2} - 3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h-3) + 5}{5h^2 + h} = 6 \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h-3) + 5}{h} = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(-3) = -5 \\ 2f'(-3) = 6 \Rightarrow f'(-3) = 3 \end{cases}$$

حال مشتق تابع $f^3\left(\frac{1}{x}\right)$ را در $x = -\frac{1}{3}$ حساب می‌کنیم:

$$(f^3\left(\frac{1}{x}\right))' = 3f^2\left(\frac{1}{x}\right) \times f'\left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{-1}{x^2} \underset{x=-\frac{1}{3}}{=} 3f^2(-3) \times f'(-3) \times (-9)$$

$$= 3(-5)^2(3)(-9) = -2025$$

حاصل حد عددی حقیقی است ولی مخرج کسر به ازای $x = 3$ صفر می‌شود؛ پس: $f(3) = 9$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 9}{(x - 3)(x + 3)} = \frac{f'(3)}{x + 3} \Rightarrow \frac{f'(3)}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow f'(3) = 2$$

حالا مشتق y را در $x = 3$ به دست می‌آوریم:

$$y = \sqrt{f(x)} + f(x) \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} + f'(x)$$

$$x = 3 \Rightarrow \frac{f'(3)}{2\sqrt{f(3)}} + f'(3) = \frac{2}{2 \times \sqrt{9}} + 2 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$$

$$1) F(x) = -F'(x) \quad (*) \xrightarrow[\text{مشتق می‌گیریم}]{\text{از دو طرف}} F'(x) = -F''(x)$$

$$\xrightarrow{(*)} F''(x) = F(x) \xrightarrow{x=2} F''(2) = F(2)$$

$$2) F'(c) = \frac{F(2) - F(1)}{2 - 1} \xrightarrow{F(1)=1} F'(c) = F(2) - 1$$

$$1, 2 \Rightarrow F''(2) - F'(c) = F(2) - (F(2) - 1) = 1$$

f' را حساب می‌کنیم:

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + kx \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 30x + k$$

شیب خط مماس بر f در نقطه $x = a$ برابر است با:

$$f'(a) = 6a^2 - 30a + k$$

که قرار است با $6a$ برابر باشد:

$$6a^2 - 30a + k = 6a \Rightarrow 6a^2 - 36a + k = 0$$

برای اینکه این معادله فقط یک جواب داشته باشد، دلتا باید برابر با صفر باشد:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (-36)^2 - 4(6)(k) = 0 \Rightarrow k = \frac{36 \times 36}{24} = 9 \times 6 = 54$$

با جایگذاری $k = 54$ ، مقدار $f'(1)$ را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 54 \Rightarrow f'(1) = 6 - 30 + 54 = 30$$

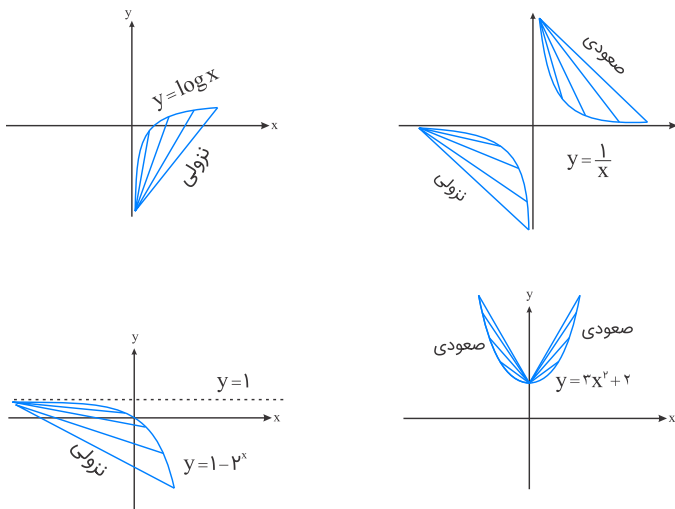
در تابع درجه دوم نقاط متقارن نسبت به محور تقارن تابع دارای شیب قرینه‌اند، پس $x = 5$ و $x = -1$ نسبت به محور تقارن قرینه‌اند؛ یعنی محور تقارن تابع $\frac{5-1}{2} = 2$ است. از ضابطه تابع هم محور تقارن آن است:

$$\frac{-a}{-2} = 2 \Rightarrow a = 4$$

می‌دانیم شیب خط مماس بر تابع درجه دوم در رأس آن صفر است، پس: $\alpha = 2$. $f(\alpha)$ برابر است با:

$$f(\alpha) = f(2) = -x^2 + 4x \xrightarrow{x=2} f(2) = -4 + 8 = 4$$

نمودار توابع را رسم می‌کنیم و آهنگ متوسط تغییر را از نقطه‌ای دلخواه بررسی می‌کنیم:



باتوجه به نمودارها گزینه ۳ صحیح است.